2.5 Ιδιότητες της παραγώγου

Στον στοιχειώδη απειροστικό λογισμό μαθαίνει κανείς πώς να *παραγωγίζει* αθροίσματα, γινόμενα, πηλίκα και σύνθετες συναρτήσεις. Θα γενικεύσουμε αυτές τις ιδέες για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, δίνοντας ιδιαίτερο βάρος στην παραγώγιση των σύνθετων συναρτήσεων. Ο κανόνας παραγώγισης των σύνθετων συναρτήσεων, που καλείται *κανόνας της αλυσίδας*, παίρνει πιο πολύπλοκη μορφή για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών από ό,τι για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

Εάν η f είναι μια πραγματική συνάρτηση μίας μεταβλητής και τη γράψουμε στη μορφή $z = f(y)$, και το y είναι μια συνάρτηση του x, συγκεκριμένα $y = g(x)$, τότε, με αντικατάσταση, το z γίνεται μια συνάρτηση του x, δηλαδή $z = f(g(x))$, και έχουμε τον γνωστό μας κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x).$$

Αν f είναι μια πραγματική συνάρτηση των τριών μεταβλητών u, v και w και τη γράψουμε στη μορφή $z = f(u, v, w)$, και οι μεταβλητές u, v, w είναι όλες συναρτήσεις του x, συγκεκριμένα $u = g(x)$, $v = h(x)$ και $w = k(x)$, τότε αντικαθιστώντας τα u, v και w με τις $g(x)$, $h(x)$ και $k(x)$ παίρνουμε το z σαν συνάρτηση του x: $z = f(g(x), h(x), k(x))$. Σε αυτή την περίπτωση, ο κανόνας της αλυσίδας παίρνει την εξής μορφή:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Ένας από τους στόχους μας σε αυτή την ενότητα είναι να εξηγήσουμε λεπτομερώς αυτούς τους τύπους.

Αθροίσματα, Γινόμενα, Πηλίκα

Αυτοί οι κανόνες λειτουργούν ακριβώς όπως στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

Θεώρημα 10 Αθροίσματα, Γινόμενα, Πηλίκα

(i) **Κανόνας του σταθερού πολλαπλασίου.** Έστω ότι η $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και έστω c ένας πραγματικός αριθμός. Η $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \qquad \text{(ισότητα πινάκων).}$$

(ii) **Κανόνας του αθροίσματος.** Έστω ότι οι $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $g\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbf{x}_0$. Η $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) \qquad \text{(άθροισμα πινάκων).}$$

(iii) **Κανόνας του γινομένου.** Έστω ότι οι $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbf{x}_0$ και έστω $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$. Η $h\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

(Προσέξτε ότι και τα δύο μέλη αυτής της εξίσωσης είναι ένας πίνακας $1 \times n$· ένας πιο γενικός κανόνας για το γινόμενο παρουσιάζεται στην Άσκηση 31, στο τέλος αυτής της ενότητας.)

(iv) **Κανόνας του πηλίκου.** Με τις ίδιες υποθέσεις όπως στον κανόνα (iii), έστω $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ και έστω ότι η g δεν μηδενίζεται πουθενά στο U. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)}{[g(\mathbf{x}_0)]^2}.$$

Απόδειξη Οι αποδείξεις των κανόνων (i) έως (iv) γίνονται σχεδόν ακριβώς όπως στην περίπτωση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, με ελαφρές διαφορές στον συμβολισμό. Θα αποδείξουμε τους κανόνες (i) και (ii) και θα αφήσουμε τις αποδείξεις των κανόνων (iii) και (iv) για την Άσκηση 27.

(i) Για να δείξουμε ότι $\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

δηλαδή ότι

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|cf(\mathbf{x}) - cf(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0$$

[βλ. εξίσωση (4) της Ενότητας 2.3]. Αυτό ισχύει σίγουρα, αφού η f είναι παραγωγίσιμη και η σταθερά c μπορεί να βγει κοινός παράγοντας [βλ. Θεώρημα 3(i), Ενότητα 2.2].

(ii) Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}&\frac{\|h(\mathbf{x})-h(\mathbf{x}_0)-[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)+\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\\&=\frac{\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)-[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+g(\mathbf{x})-g(\mathbf{x}_0)-[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\\&\le\frac{\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)-[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}+\frac{\|g(\mathbf{x})-g(\mathbf{x}_0)-[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\end{aligned}$$

και κάθε όρος τείνει στο 0 καθώς $\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0$. Άρα ο κανόνας (ii) ισχύει. ∎

Παράδειγμα 1 Επαληθεύστε τον τύπο για την $\mathbf{D}h$ του κανόνα (iv) του Θεωρήματος 10 για τις συναρτήσεις

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \text{ και } g(x,y,z)=x^2+1.$$

Λύση Έχουμε

$$h(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+1},$$

οπότε με απευθείας παραγώγιση

$$\begin{aligned}\mathbf{D}h(x,y,z)&=\left[\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial y},\frac{\partial h}{\partial z}\right]=\left[\frac{(x^2+1)2x-(x^2+y^2+z^2)2x}{(x^2+1)^2},\frac{2y}{x^2+1},\frac{2z}{x^2+1}\right]\\&=\left[\frac{2x(1-y^2-z^2)}{(x^2+1)^2},\frac{2y}{x^2+1},\frac{2z}{x^2+1}\right].\end{aligned}$$

Από τον κανόνα (iv) παίρνουμε

$$\mathbf{D}h=\frac{g\mathbf{D}f-f\mathbf{D}g}{g^2}=\frac{(x^2+1)[2x,2y,2z]-(x^2+y^2+z^2)[2x,0,0]}{(x^2+1)^2},$$

που είναι το ίδιο με αυτό που πήραμε απευθείας. ▲

Κανόνας της αλυσίδας

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, στον τύπο της παραγώγισης σύνθετων συναρτήσεων συναντάμε σημαντικές διαφορές σε σχέση με αυτόν που γνωρίζουμε για την περίπτωση συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Ωστόσο, αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\mathbf{D}$, δηλαδή τον συμβολισμό με πίνακες για τις παραγώγους, ο κανόνας της αλυσίδας για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών μοιάζει με τον αντίστοιχο κανόνα για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

Θεώρημα 11 Κανόνας της αλυσίδας Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ και $V\subset\mathbb{R}^m$ ανοιχτά σύνολα. Έστω $g\colon U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ και $f\colon V\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ δεδομένες συναρτήσεις τέτοιες ώστε η g να απεικονίζει το U στο V, ώστε να ορίζεται η $f\circ g$. Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbf{y}_0=g(\mathbf{x}_0)$, τότε η $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και

$$\mathbf{D}(f\circ g)(\mathbf{x}_0)=\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0). \tag{1}$$

Το δεξιό μέλος είναι το γινόμενο των πινάκων $\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)$ και $\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$.

Θα δώσουμε μια απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας *υπό την πρόσθετη παραδοχή ότι οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς*. Θα καταλήξουμε στη γενική περίπτωση μέσω δύο ειδικών περιπτώσεων που είναι από μόνες τους σημαντικές. (Η πλήρης απόδειξη του Θεωρήματος 11 χωρίς την πρόσθετη παραδοχή της συνέχειας δίνεται στο διαδικτυακό συμπλήρωμα του Κεφαλαίου 2.)

Πρώτη ειδική περίπτωση του κανόνα της αλυσίδας

Έστω $\mathbf{c}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ μια παραγωγίσιμη διαδρομή και $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Αν $h(t) = f(\mathbf{c}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$, όπου $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, τότε

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{2}$$

Δηλαδή

$$\frac{dh}{dt} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t),$$

όπου $\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Αυτό αποτελεί ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 11, για $\mathbf{c} = g$, f πραγματική και $m = 3$. Προσέξτε ότι

$$\nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))\mathbf{D}\mathbf{c}(t),$$

όπου το γινόμενο στο αριστερό μέλος είναι ένα εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, το γινόμενο στο δεξιό μέλος είναι ένας πολλαπλασιασμός πινάκων, και όπου θεωρούμε την $\mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))$ ως πίνακα-*γραμμή* και την $\mathbf{D}\mathbf{c}(t)$ ως πίνακα-*στήλη*. Τα διανύσματα $\nabla f(\mathbf{c}(t))$ και $\mathbf{c}'(t)$ έχουν τις ίδιες συνιστώσες με τους ισοδύναμους τους πίνακες· η αλλαγή στον συμβολισμό υποδηλώνει την αλλαγή από πίνακες σε διανύσματα.

Απόδειξη της εξίσωσης (2) Σύμφωνα με τον ορισμό,

$$\frac{dh}{dt}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}.$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας δύο όρους, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(x(t), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{t - t_0} \\
&= \frac{f(x(t), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t), z(t))}{t - t_0} \\
&\quad + \frac{f(x(t_0), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t))}{t - t_0} \\
&\quad + \frac{f(x(t_0), y(t_0), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{t - t_0}.
\end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο καταφεύγουμε στο *θεώρημα μέσης τιμής* του λογισμού των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, το οποίο λέει ότι *αν η $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, b), τότε υπάρχει ένα σημείο c στο (a, b) τέτοιο ώστε $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$*. Εφαρμόζοντάς το στην f σαν συνάρτηση του x, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι για κάποιο c μεταξύ x και x_0,

$$f(x, y, z) - f(x_0, y, z) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, y, z)\right](x - x_0).$$

Με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, y(t), z(t))\right]\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), d, z(t))\right]\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$$
$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x(t_0), y(t_0), e)\right]\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0},$$

όπου τα c, d και e βρίσκονται μεταξύ των $x(t)$ και $x(t_0)$, μεταξύ των $y(t)$ και $y(t_0)$, και μεταξύ των $z(t)$ και $z(t_0)$, αντίστοιχα. Παίρνοντας το όριο για $t \to t_0$, χρησιμοποιώντας τη συνέχεια των μερικών παραγώγων $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z$ και το γεγονός ότι τα c, d και e συγκλίνουν στα $x(t_0)$, $y(t_0)$ και $z(t_0)$, αντίστοιχα, παίρνουμε τον τύπο (2). ∎

Δεύτερη ειδική περίπτωση του κανόνα της αλυσίδας

Έστω $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Γράφουμε

$$g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$$

και ορίζουμε την $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ως

$$h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)).$$

Σε αυτή την περίπτωση ο κανόνας της αλυσίδας λέει ότι

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Σε αυτή την ειδική περίπτωση, πήραμε $n = m = 3$ και $p = 1$ για να συγκεκριμενοποιήσουμε τα πράγματα, $U = \mathbb{R}^3$ και $V = \mathbb{R}^3$ για απλότητα, και γράψαμε αναλυτικά το γινόμενο πινάκων $[\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)][\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]$ (παραλείποντας από τους πίνακες τα ορίσματα $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{y}_0$).

Απόδειξη της δεύτερης ειδικής περίπτωσης του κανόνα της αλυσίδας Εξ ορισμού, η $\partial h/\partial x$ προκύπτει αν παραγωγίσουμε την h ως προς x, κρατώντας τα y και z σταθερά. Η $(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ μπορεί τότε να θεωρηθεί διανυσματική συνάρτηση της μίας μεταβλητής x. Σε αυτή την κατάσταση εφαρμόζεται η πρώτη ειδική περίπτωση και, αφού μετονομάσουμε τις μεταβλητές, παίρνουμε

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{3'}$$

Με αντίστοιχο τρόπο,

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3''}$$

και

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{3'''}$$

Στην πράξη, στο τελευταίο βήμα, συνήθως εκφράζουμε τις $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ και $\frac{\partial f}{\partial w}$ συναρτήσει των x, y, z. Αυτές οι εξισώσεις μάς δίνουν ακριβώς αυτό που θα παίρναμε αν πολλαπλασιάζαμε τους πίνακες στην εξίσωση (3). ■

Απόδειξη του θεωρήματος 11 Η γενική περίπτωση στην εξίσωση (1) μπορεί να αποδειχθεί σε δύο βήματα. Αρχικά, γενικεύουμε την εξίσωση (2) για m μεταβλητές. Έτσι, για $f(x_1, \dots, x_m)$ και $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ έχουμε

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt},$$

όπου $h(t) = f(x_1(t), \dots, x_m(t))$. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα που πήραμε στο πρώτο βήμα ώστε να πάρουμε τον τύπο

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i},$$

όπου $f = (f_1, \dots, f_p)$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση με ορίσματα $y_1, \dots, y_m$, και

$$g(x_1, \dots, x_n) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$$

και

$$h_j(x_1, \dots, x_n) = f_j(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)).$$

(Η χρήση του γράμματος y και ως συνάρτησης και ως ορίσματος είναι κατάχρηση του συμβολισμού, αλλά μας βοηθάει να θυμόμαστε τον τύπο.) Αυτός ο τύπος είναι ισοδύναμος με τον (1), αφού πολλαπλασιάσουμε μεταξύ τους τους πίνακες. ■

Θα καταλάβετε καλύτερα πώς εφαρμόζεται ο κανόνας της αλυσίδας μελετώντας μερικά ακόμη παραδείγματα. Για παράδειγμα,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u(x,y), v(x,y), w(x,y), z(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

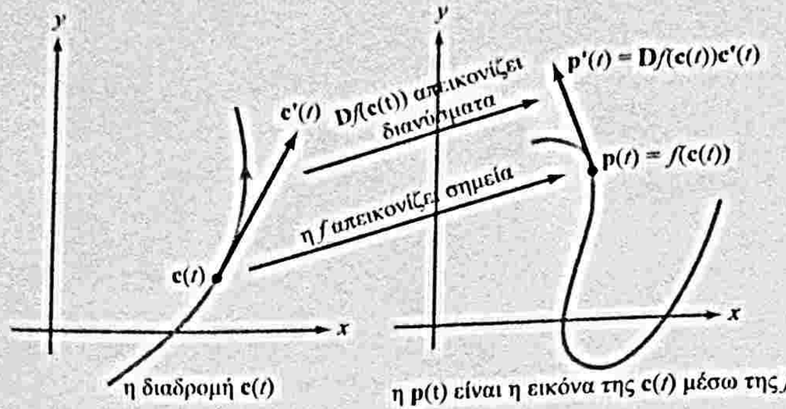
και αντίστοιχος είναι ο τύπος για την $\partial f/\partial y$.

Ο κανόνας της αλυσίδας μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τη σχέση μεταξύ της γεωμετρίας μιας απεικόνισης $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ και της γεωμετρίας των καμπυλών στον $\mathbb{R}^2$. (Αντίστοιχοι συλλογισμοί μπορούν να γίνουν για τον $\mathbb{R}^3$ ή, γενικά, για τον $\mathbb{R}^n$.) Αν $\mathbf{c}(t)$ είναι μια διαδρομή στο επίπεδο, τότε, όπως είδαμε στην Ενότητα 2.4, το $\mathbf{c}'(t)$ αναπαριστά το εφαπτόμενο διάνυσμα (ή το διάνυσμα ταχύτητας) της διαδρομής $\mathbf{c}(t)$, και θεωρούμε ότι αυτό το εφαπτόμενο διάνυσμα (ή διάνυσμα ταχύτητας) ξεκινάει από το $\mathbf{c}(t)$. Έστω $\mathbf{p}(t) = f(\mathbf{c}(t))$, όπου $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Η διαδρομή $\mathbf{p}$ αναπαριστά την εικόνα της διαδρομής $\mathbf{c}(t)$ μέσω της απεικόνισης f. Το εφαπτόμενο διάνυσμα της $\mathbf{p}$ δίνεται από τον κανόνα της αλυσίδας:

πολλαπλασιασμός πινάκων

$$\mathbf{p}'(t) = \underbrace{\mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))}_{\text{πίνακας}}\ \underbrace{\mathbf{c}'(t)}_{\text{διάνυσμα-στήλη}}.$$

Με άλλα λόγια, ο πίνακας παραγώγων της f απεικονίζει το εφαπτόμενο διάνυσμα (ή το διάνυσμα ταχύτητας) μιας διαδρομής $\mathbf{c}$ στο εφαπτόμενο διάνυσμα (ή στο διάνυσμα ταχύτητας) της αντίστοιχης διαδρομής-εικόνας $\mathbf{p}$ (βλ. Σχήμα 2.5.1). Άρα τα σημεία απεικονίζονται από την f, ενώ τα εφαπτόμενα διανύσματα των καμπυλών απεικονίζονται από την παράγωγο της f, υπολογισμένη στο σημείο εφαρμογής του εφαπτόμενου διανύσματος.



Σχήμα 2.5.1 Τα εφαπτόμενα διανύσματα απεικονίζονται από τον πίνακα παραγώγων.

Παράδειγμα 2 Επαληθεύστε τον κανόνα της αλυσίδας στη μορφή του τύπου (3′) για την

$$f(u,v,w) = u^2 + v^2 - w,$$

όπου

$$u(x,y,z) = x^2y, \qquad v(x,y,z) = y^2, \qquad w(x,y,z) = e^{-xz}.$$

Λύση Έχουμε

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &= f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)) \\ &= (x^2y)^2 + y^4 - e^{-xz} = x^4y^2 + y^4 - e^{-xz}. \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας απευθείας,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x^3y^2 + ze^{-xz}.$$

Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 2u(2xy) + 2v\cdot 0 + (-1)(-ze^{-xz}) \\ &= (2x^2y)(2xy) + ze^{-xz}, \end{aligned}$$

που είναι το ίδιο με την προηγούμενη εξίσωση. ▲

Παράδειγμα 3 Δεδομένων των $g(x,y) = (x^2+1, y^2)$ και $f(u,v) = (u+v, u, v^2)$, υπολογίστε την παράγωγο της $f \circ g$ στο σημείο $(x,y) = (1,1)$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας.

Λύση Οι πίνακες μερικών παραγώγων είναι

$$\mathbf{D}f(u,v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{D}g(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}.$$

Όταν $(x, y) = (1, 1)$, παρατηρούμε ότι $g(x, y) = (u, v) = (2, 1)$. Επομένως, η ζητούμενη παράγωγος είναι

$$\mathbf{D}(f \circ g)(1,1) = \mathbf{D}f(2,1)\mathbf{D}g(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

▲

Παράδειγμα 4 Έστω ότι μας δίνεται η $f(x, y)$ και κάνουμε την αντικατάσταση $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (πολικές συντεταγμένες). Βρείτε έναν τύπο για την $\partial f/\partial\theta$.

Λύση Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta},$$

δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}.$$

▲

Παράδειγμα 5 Έστω $f(x, y) = (\cos y + x^2, e^{x+y})$ και $g(u, v) = (e^{u^2}, u - \sin v)$.

(α) Βρείτε έναν τύπο για την $f \circ g$.

(β) Υπολογίστε την $\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0)$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας.

Λύση (α) Έχουμε

$$\begin{aligned}(f \circ g)(u, v) &= f(e^{u^2}, u - \sin v) \\ &= \left(\cos(u - \sin v) + e^{2u^2}, e^{e^{u^2} + u - \sin v}\right).\end{aligned}$$

(β) Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0) = [\mathbf{D}f(g(0, 0))][\mathbf{D}g(0, 0)] = [\mathbf{D}f(1, 0)][\mathbf{D}g(0, 0)].$$

Όμως

$$\mathbf{D}g(0,0) = \begin{bmatrix} 2ue^{u^2} & 0 \\ 1 & -\cos v \end{bmatrix}_{(u,v)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{D}f(1,0) = \begin{bmatrix} 2x & -\sin y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix}.$$

[Υπενθυμίζουμε ότι υπολογίζουμε την $\mathbf{D}f$ στο $g(0, 0)$, όχι στο $(0, 0)$!]. Επομένως,

$$\mathbf{D}(f \circ g)(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \end{bmatrix}.$$

▲

Παράδειγμα 6 Έστω ότι η $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, με $f = (f_1, \ldots, f_m)$, είναι παραγωγίσιμη, και έστω $g(\mathbf{x}) = \sin[f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})]$. Υπολογίστε την $\mathbf{D}g(\mathbf{x})$.

Λύση Από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι $\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = \cos[f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{x})]\mathbf{D}h(\mathbf{x})$, όπου $h(\mathbf{x}) = [f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{x})] = f_1^2(\mathbf{x}) + \cdots + f_m^2(\mathbf{x})$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathbf{D}h(x) &= \left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n}\right]\\ &= \left[2f_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + 2f_m\frac{\partial f_m}{\partial x_1} \quad \cdots \quad 2f_1\frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \cdots + 2f_m\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\right],\end{aligned}$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως $2f(\mathbf{x})\mathbf{D}f(\mathbf{x})$, όπου θεωρούμε την f ως πίνακα-γραμμή:

$$f = [f_1 \quad \cdots \quad f_m] \quad \text{και} \quad \mathbf{D}f = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}.$$

Άρα $\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = 2[\cos(f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{x}))]f(\mathbf{x})\mathbf{D}f(\mathbf{x})$. ▲

Ασκήσεις

1. Αν η $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, αποδείξτε ότι η $\mathbf{x} \mapsto f^2(\mathbf{x}) + 2f(\mathbf{x})$ είναι επίσης παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της συναρτήσει της $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$.

2. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες και βρείτε την παράγωγό τους σε τυχόν σημείο:

(α) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 2$

(β) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x + y$

(γ) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 2 + x + y$

(δ) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2$

(ε) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto e^{xy}$

(στ) $f\colon U \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, όπου $U = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$

(ζ) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^4 - y^4$

3. Επαληθεύστε την πρώτη ειδική περίπτωση του κανόνα της αλυσίδας για τη σύνθεση $f \circ \mathbf{c}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $f(x,y) = xy$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t)$

(β) $f(x,y) = e^{xy}$, $\mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$

(γ) $f(x,y) = (x^2 + y^2)\log\sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t})$

(δ) $f(x,y) = x\exp(x^2 + y^2)$, $\mathbf{c}(t) = (t, -t)$

4. Ποιο είναι το διάνυσμα ταχύτητας κάθε διαδρομής $\mathbf{c}(t)$ της Άσκησης 3; [Ο Οδηγός μελέτης περιέχει τη λύση μόνο για το μέρος (β).]

5. Έστω ότι οι $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες. Αποδείξτε ότι

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

6. Έστω ότι η $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη. Εφαρμόζοντας στην $f(x,y,z)$ την αντικατάσταση

$$x = \rho\cos\theta\sin\phi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\phi, \quad z = \rho\cos\phi$$

(σφαιρικές συντεταγμένες), υπολογίστε τις $\partial f/\partial\rho, \partial f/\partial\theta$ και $\partial f/\partial\phi$ συναρτήσει των $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ και $\partial f/\partial z$.

7. Έστω $f(u,v) = (\tan(u-1) - e^v, u^2 - v^2)$ και $g(x,y) = (e^{x-y}, x - y)$. Υπολογίστε την $f \circ g$ και την $\mathbf{D}(f \circ g)(1,1)$.

8. Έστω $f(u,v,w) = (e^{u-w}, \cos(v+u) + \sin(u+v+w))$ και $g(x,y) = (e^x, \cos(y-x), e^{-y})$. Υπολογίστε την $f \circ g$ και την $\mathbf{D}(f \circ g)(0,0)$.

9. Βρείτε την $(\partial/\partial s)(f \circ T)(1,0)$, όπου $f(u,v) = \cos u \sin v$ και η $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ορίζεται από την $T(s,t) = (\cos(t^2 s), \log\sqrt{1+s^2})$.

10. Υποθέστε ότι η θερμοκρασία στο σημείο (x,y,z) του χώρου είναι $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Έστω ότι ένα σωματίδιο ακολουθεί την ορθή κυκλική έλικα $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ και έστω $T(t)$ η θερμοκρασία του τη χρονική στιγμή t.

(α) Ποια είναι η $T'(t)$;

(β) Βρείτε μια προσεγγιστική τιμή για τη θερμοκρασία τη χρονική στιγμή $t = (\pi/2) + 0{,}01$.

11. Έστω $f(x, y, z) = (3y + 2, x^2 + y^2, x + z^2)$ και $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.

(α) Βρείτε τη διαδρομή $\mathbf{p} = f \circ \mathbf{c}$ και το διάνυσμα ταχύτητας $\mathbf{p}'(\pi)$.

(β) Βρείτε τα $\mathbf{c}(\pi)$, $\mathbf{c}'(\pi)$ και $\mathbf{D}f(-1, 0, \pi)$.

(γ) Θεωρώντας την $\mathbf{D}f(-1, 0, \pi)$ ως γραμμική απεικόνιση, να βρείτε την $\mathbf{D}f(-1, 0, \pi)\,(\mathbf{c}'(\pi))$.

12. Έστω ότι οι $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ και $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ δίνονται από τις $h(x, y, z) = (xyz, e^{xz}, x\sin(y), \frac{-9}{x}, 17)$ και $g(u, v) = (v^2 + 2u, \pi, 2\sqrt{u})$. Βρείτε την $\mathbf{D}(h \circ g)(1, 1)$.

13. Υποθέστε ότι μια πάπια κολυμπάει επί του κύκλου $x = \cos t$, $y = \sin t$ και ότι η θερμοκρασία του νερού δίνεται από τον τύπο $T = x^2 e^y - xy^3$. Βρείτε την dT/dt, τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας που αισθάνεται η πάπια (α) χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και (β) εκφράζοντας την T συναρτήσει του t και παραγωγίζοντας.

14. Έστω $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια γραμμική απεικόνιση και $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ ο πίνακας παραγώγων της f (βλ. Άσκηση 28 της Ενότητας 2.3). Ελέγξτε απευθείας την ισχύ του κανόνα της αλυσίδας για τις γραμμικές απεικονίσεις.

15. Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (e^{x+y}, e^{x-y})$ και έστω $\mathbf{c}(t)$ μια διαδρομή με $\mathbf{c}(0) = (0, 0)$ και $\mathbf{c}'(0) = (1, 1)$. Ποιο είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της εικόνας της $\mathbf{c}(t)$ μέσω της f στο $t = 0$;

16. Έστω $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. Υπολογίστε το $\nabla f(x, y)$.

17. Γράψτε τον κανόνα της αλυσίδας για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις και δικαιολογήστε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 11.

(α) $\partial h/\partial x$, όπου $h(x, y) = f(x, u(x, y))$

(β) dh/dx, όπου $h(x) = f(x, u(x), v(x))$

(γ) $\partial h/\partial x$, όπου $h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y), w(x))$

18. Επαληθεύστε τον κανόνα της αλυσίδας για την $\partial h/\partial x$, όπου $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ και

$$f(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}, \qquad u(x, y) = e^{-x-y}, \qquad v(x, y) = e^{xy}.$$

19. (α) Έστω ότι η $y(x)$ ορίζεται πεπλεγμένα (η $y(x)$ δεν δίνεται άμεσα σαν συνάρτηση του x) από την $G(x, y(x)) = 0$, όπου G είναι μια δεδομένη συνάρτηση δύο μεταβλητών. Αποδείξτε ότι αν οι $y(x)$ και G είναι παραγωγίσιμες, τότε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial y} \qquad \text{αν} \qquad \frac{\partial G}{\partial y} \neq 0.$$

(β) Βρείτε έναν τύπο αντίστοιχο εκείνου του ερωτήματος (α) αν οι y_1, y_2 ορίζονται πεπλεγμένα από τις

$$G_1(x, y_1(x), y_2(x)) = 0,$$
$$G_2(x, y_1(x), y_2(x)) = 0.$$

(γ) Έστω ότι η y ορίζεται πεπλεγμένα από την

$$x^2 + y^3 + e^y = 0.$$

Υπολογίστε την dy/dx συναρτήσει των x και y.

20. Στα βιβλία θερμοδυναμικής[4] χρησιμοποιείται η σχέση

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -1.$$

Εξηγήστε τη σημασία αυτής της εξίσωσης και αποδείξτε ότι ισχύει. [Υπόδειξη: Ξεκινήστε από τη σχέση $F(x, y, z) = 0$ που ορίζει τα $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$ και $z = h(x, y)$ και παραγωγίστε τις πεπλεγμένες συναρτήσεις.]

21. Η εξίσωση του Dieterici για την κατάσταση ενός αερίου είναι

$$P(V - b)e^{a/RVT} = RT,$$

όπου τα a, b και R είναι σταθερές. Θεωρώντας ότι ο όγκος V είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας T και της πίεσης P, αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \left(R + \frac{a}{TV}\right)\Big/\left(\frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}\right).$$

22. Αυτή η άσκηση είναι ένα ακόμη παράδειγμα του γεγονότος ότι ο κανόνας της αλυσίδας δεν εφαρμόζεται αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη. Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

[4] Βλ. S. M. Binder, «Mathematical Methods in Elementary Thermodynamics», *J. Chem. Educ.*, 43 (1966): 85–92. Η σωστή κατανόηση της μερικής παραγώγισης είναι ιδιαίτερα σημαντική για τις εφαρμογές· για παράδειγμα, βλ. M. Feinberg, «Constitutive Equation for Ideal Gas Mixtures and Ideal Solutions as Consequences of Simple Postulates», *Chem. Eng. Sci.*, 32 (1977): 75–78.

Δείξτε ότι

(α) Οι $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$ υπάρχουν στο $(0,0)$.

(β) Αν $\mathbf{g}(t) = (at, bt)$ για κάποιες σταθερές a και b, τότε η $f \circ \mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη και $(f \circ \mathbf{g})'(0) = ab^2/(a^2+b^2)$, αλλά $\nabla f(0,0) \cdot \mathbf{g}'(0) = 0$.

23. Αποδείξτε ότι αν η $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 \in U$, υπάρχει μια γειτονιά V του $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ και μια συνάρτηση $R_1: V \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $\mathbf{h} \in V$ να έχουμε $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in U$,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h} + R_1(\mathbf{h})$$

και

$$\frac{R_1(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \to 0 \quad \text{καθώς} \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

24. Υποθέστε ότι $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $0 \le r_1 < r_2$. Δείξτε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1 τέτοια ώστε $f(\mathbf{x}) = 0$ για $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \ge r_2$, $0 < f(\mathbf{x}) < 1$ για $r_1 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r_2$, και $f(\mathbf{x}) = 1$ για $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \le r_1$. [Υπόδειξη: Εφαρμόστε ένα κυβικό πολυώνυμο με $g(r_1^2) = 1$ και $g(r_2^2) = g'(r_2^2) = g'(r_1^2) = 0$ στο $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ όταν $r_1 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r_2$.]

25. Βρείτε μια απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ κλάσης C^1 που να απεικονίζει το διάνυσμα $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ με αφετηρία την αρχή των αξόνων στο $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ με αφετηρία το σημείο $(1,1,0)$ και να απεικονίζει το $\mathbf{k}$ με αφετηρία το $(1,1,0)$ στο $\mathbf{k} - \mathbf{i}$ με αφετηρία την αρχή των αξόνων.

26. Ποιο είναι το λάθος στον παρακάτω συλλογισμό; Έστω ότι $w = f(x,y,z)$ και $z = g(x,y)$. Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Επομένως $0 = (\partial w/\partial z)(\partial z/\partial x)$, άρα $\partial w/\partial z = 0$ ή $\partial z/\partial x = 0$, το οποίο είναι, εν γένει, παράλογο.

27. Αποδείξτε τους κανόνες (iii) και (iv) του Θεωρήματος 10. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τα ίδια τεχνάσματα πρόσθεσης και αφαίρεσης όπως στις συναρτήσεις μίας μεταβλητής και το Θεώρημα 8.)

28. Δείξτε ότι η $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμη αν και μόνο αν καθεμία από τις m συνιστώσες $h_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση προβολής συντεταγμένων και τον κανόνα της αλυσίδας για τη μια συνεπαγωγή και θεωρήστε την

$$\left[\frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}h(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}\right]^2 = \frac{\sum_{i=1}^m [h_i(\mathbf{x}) - h_i(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}h_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)]^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}$$

για να πάρετε την άλλη.)

29. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και τον κανόνα της παραγώγισης ολοκληρωμάτων, δηλαδή

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy,$$

δείξτε ότι

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x,y)\,dy = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

30. Για ποιους ακεραίους $p > 0$ είναι παραγωγίσιμη η

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin(1/x) & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases};$$

Για ποια p είναι συνεχής η παράγωγος;

31. Έστω ότι οι $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμες. Δείξτε ότι η συνάρτηση γινόμενο $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμη και ότι αν τα $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{y}$ ανήκουν στον $\mathbb{R}^n$, τότε $[\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_0)\{[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}\} + \{[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}\}g(\mathbf{x}_0)$.

32. Έστω $g(u,v) = (e^u, u + \sin v)$ και $f(x,y,z) = (xy, yz)$. Υπολογίστε την τιμή της $\mathbf{D}(g \circ f)$ στο $(0,1,0)$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας.

33. Έστω $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{c}(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$. Υποθέστε ότι $\nabla f(1,1,\pi,e^6) = (0,1,3,-7)$, $\mathbf{c}(\pi) = (1,1,\pi,e^6)$ και $\mathbf{c}'(\pi) = (19,11,0,1)$. Βρείτε την $\dfrac{d(f \circ \mathbf{c})}{dt}$ όταν $t = \pi$.

34. Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $g: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.

(α) Τι πρέπει να ισχύει για τους αριθμούς n, m, p και q ώστε να έχει νόημα η $f \circ g$;

(β) Τι πρέπει να ισχύει για του αριθμούς n, m, p και q ώστε να έχει νόημα η $g \circ f$;

(γ) Πότε έχει νόημα η $f \circ f$;

35. Αν $z = f(x - y)$, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας δείξτε ότι $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

36. Έστω $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = uv$, $y = u\cos v$, $z = u \sin v$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας να βρείτε την $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ στο $(u,v) = (1,0)$.